

УДК 624.012.45

Н.Р. Вільданова, ОДАБА, м. Одеса

**МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ НДС  
БЕТОННОГО СТРИЖНЬОВОГО ЕЛЕМЕНТА  
КРУГЛОГО І КІЛЬЦЕВОГО ПЕРЕРІЗІВ  
ЗА ДІЇ КРУЧЕННЯ**

**АНОТАЦІЯ**

У роботі розроблено інтерпретацію методики розрахунку НДС залізобетонних елементів при чистому крученні у застосуванні до кільцевого і круглого перерізів.

Ключові слова: крутильна жорсткість, діаграма зсуву бетону, чисте кручення, геометрія кільцевого перерізу.

У сучасній теорії залізобетону і практиці проектування актуальне вивчення залізобетонних елементів різних перерізів з тріщинами і без за дії згину і кручення [1,3] внаслідок значного впливу деформацій зсуву на просторову роботу елементів конструкцій. У контексті детального теоретичного і експериментального дослідження бетонного елемента кільцевого перерізу інтерес представляє вивчення НДС досліджуваного елемента при чистому крученні.

Розрахунок для елементів круглого і кільцевого перерізів проводимо за методикою [2], визначаючи геометричні характеристики через радіани.

**1. Побудування діаграми зсуву бетону.** Спочатку за зазначеною методикою будуємо діаграму зсуву бетону: це необхідно для визначення жорсткісних характеристик – січного модуля деформацій першого роду і модуля зсуву бетону:

$$G_c = \frac{E_c^0 \vartheta_c}{2(1 + \mu_c)}, \quad (1)$$

де  $G_c$  – модуль пружності бетону другого;  $E_c^0$  – початковий модуль пружності бетону;  $\vartheta_c$  – коефіцієнт зміни січного модуля пружності при зсуві, визначається за [2];  $\mu_c$  – коефіцієнт Пуассона для бетону.

**2. Дослідження геометрії перерізу. Знаходження основних невідомих геометричних характеристик.** У розрахунках ми оперуватимемо полярними координатами через зручність їх застосу-

вання у даному випадку. Розглядати слід коло, утворене радіусом перерізу, розташованого у центрі ваги досліджуваного сектора, і прийнятим кутом повороту сектора для більш точного дослідження НДС та можливості дослідження дрібніших пристроїв.

Декартові координати виражаємо наступним чином:

$$\begin{cases} R_0^2 = x_{ci}^2 + y_{ci}^2 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{ci}}{x_{ci}}, \text{ при } x_{ci} \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Декартові координати необхідних точок перерізу через полярні вираховуємо за формулами (3):

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2}; \cos \alpha = \frac{x_{ci}}{\sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2}}; \\ \sin \alpha &= \frac{y_{ci}}{\sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2}}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{ci}}{x_{ci}} \end{aligned} \quad (3)$$

Полярні координати центра досліджуваного сектора у загальному вигляді і в нашому варіанті:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases} \equiv \begin{cases} x_{ci} = R_0 \cos \alpha \\ y_{ci} = R_0 \sin \alpha \end{cases}, \quad (4)$$

де  $x_c, y_c$  – координати центра ваги досліджуваного сектора;  $R_0$  – радіус перерізу, що перетинає центр ваги досліджуваного сектора;  $\alpha$  – кут сектора.

Розглядатимемо круглий переріз, тобто головні значення полярного кута  $\alpha$ , тому приймаємо  $0 \leq \alpha \leq \pi$  і отримуємо формули для встановлення полярних координат, аналогічні (3):

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{x_{ci}}{\sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2}} \text{ при } y \geq 0 \\ 2R_0 - \arccos \frac{x_{ci}}{\sqrt{x_{ci}^2 + y_{ci}^2}} \text{ при } y < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Наприклад, точку (рис.1,а) з декартовими координатами  $M(X_{ci}; Y_{ci})=M(0;9.6)$  через полярні позначатимемо  $M(R_0; \alpha)=M(9,6;\pi/2)$ .

Площа кільця складає:

$$A_{\text{кільця}} = A_R^o - A_r^o = \pi(R^2 - r^2). \quad (6)$$

Площа секторів круга і кільця дорівнюють:

$$\begin{aligned} A_{\text{бі.круг}} &= \frac{\pi r^2}{\pi} = r^2; A_{\text{бі.кільце}} = R^2 - r^2, \\ \text{при } i &= 2^\circ, \pi = 180^\circ \end{aligned} \quad (7)$$

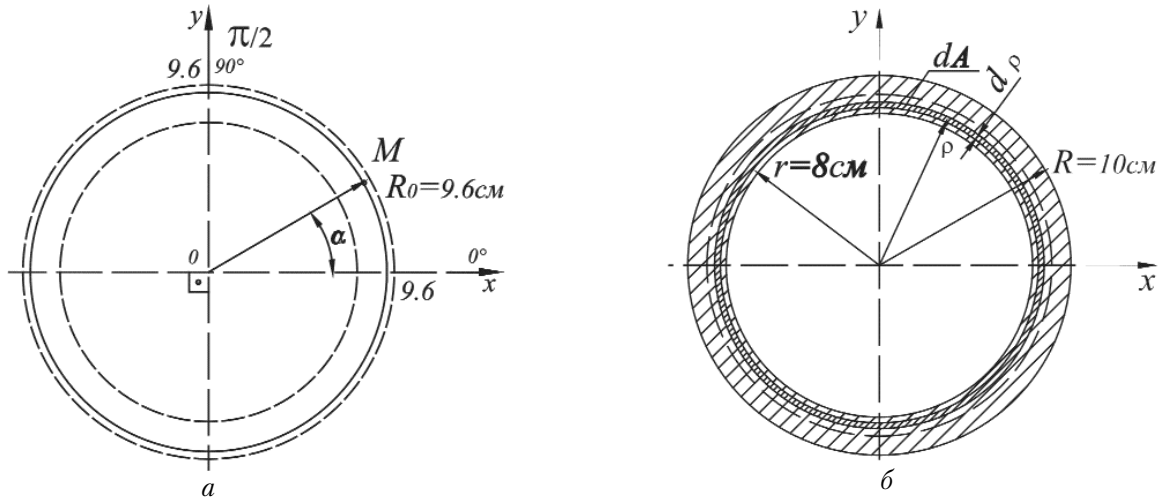


Рис. 1. Кільцевий переріз

а) відповідність полярної СК декартовій; б) геометричні характеристики кільцевого перерізу

Координати перерізу визначаємо з рівняння кола

$$y_{bi} = \sqrt{r^2 - x_{bi}^2}; r = 1 - 0.8 = 0.9 \text{ см}$$

при розташуванні і-го елемента

$$x_{bi} [0; 0.9]; r = 1 - 0.8 = 0.9 \text{ см}$$

Координати досліджуваного і-го елемента

$$X = r \cos \alpha; Y = r \sin \alpha.$$

Визначимо геометричний момент інерції кільця. Геометричний момент інерції кола знаходимо, приймаючи площу елементарної площадки рівною

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

$$\begin{aligned} I_p &\approx \sum_{i=1}^n 2\pi\rho_i^3 d\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \end{aligned} \quad (8)$$

Геометричний момент інерції кільця приймаємо як різницю моментів інерції двох кіл:

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_r^R \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_r^R \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \end{aligned} \quad (9)$$

Або для тонкостінних циліндрів:

$$I_p = \int_A \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 dA = \int_r^R \frac{\delta^2}{4} 2\pi \frac{\delta}{2} d\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\pi \int_r^R \frac{\delta^3}{8} d\left(\frac{\delta}{2}\right) = \quad (10)$$

$$= \left[\frac{\delta}{2} = t\right] = 2\pi \int_r^R t^3 dt = 2\pi \frac{t^4}{4} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\delta^4}{8}\right) = \frac{\pi\delta^4}{32}$$

Для подальших розрахунків (наприклад, для визначення координат відносно центра крутіння  $X_{ci}, Y_{ci}$ ) необхідно знайти центр ваги сектора кільця. В залежності від прийнятого кроку ми змінюватимемо розмір розірваного кільця.

Визначимо формулу центра ваги сектора кільця, що знадобиться нам при змінненні кута  $\alpha$  (рис.1, б). Площа сектора кільця складає

$$S_{sect} = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{360^\circ} R^2 \alpha^\circ = \frac{\alpha}{2} R^2 \quad (11)$$

Координату центра ваги сектора кола знайдемо як

$$x_{sect} = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha} \quad (12)$$

Координату центра ваги кільцевого сектора отримаємо наступним чином:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n S_i x_i}{\sum_{i=1}^n S_i} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i x_i}{\sum_{i=1}^n S_i} = \frac{\frac{\alpha}{2} R^2 \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha} - \frac{\alpha}{2} r^2 \frac{2 r \sin \alpha}{3 \alpha}}{\frac{\alpha}{2} R^2 - \frac{\alpha}{2} r^2} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{3} (R^3 - r^3)}{\frac{\alpha}{2} (R^2 - r^2)} = \frac{2 \sin \alpha}{3 \alpha} \frac{(R^3 - r^3)}{(R^2 - r^2)} = \frac{2}{3} \times \frac{(R^3 - r^3) \sin \alpha}{(R^2 - r^2) \alpha} \end{aligned} \quad (13)$$

**3. Розбиття перерізу стрижня на елементи.** Переріз розбиватимемо за секторами і за товщиною (рис.2).

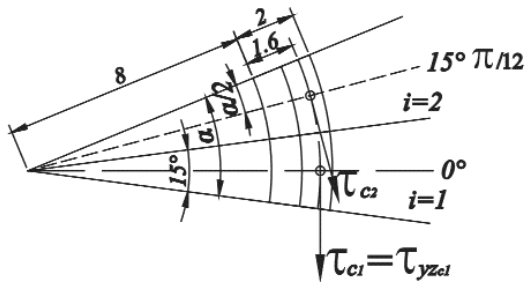


Рис. 2. Розбиття перерізу стрижня на елементи

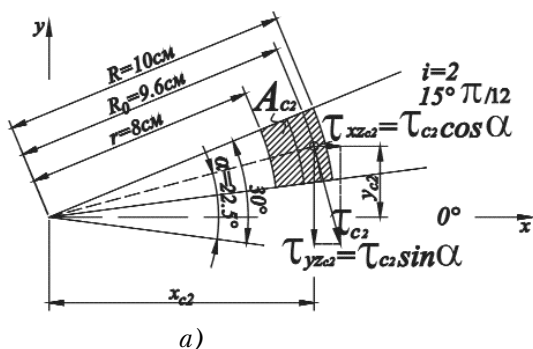
Можна визначати компоненти НДС перерізу від 0° до 360°, а можна (змінюючи, де потрібно, знак) від 0° до 90°, оскільки в інших чвертях епюри будуть симетричними відносно осей.

Розглядаючи досліджуваний бетонний циліндричний стрижньовий елемент, простіше за все розбити переріз на 24 сектори по 15°, а за довжиною — на 10-20 частин в залежності від розмірів. Також можна виконати більш детальний розрахунок, розбиваючи переріз на 360 секторів через кожний градус (рис. 3, а) і на n частин за товщиною (рис. 3, б); у даному випадку прийнято n=5, а товщина — 0,4 см, тобто 2 см=5x0,4.

**4. Визначення несучої здатності досліджуваного перерізу.** Крутильний момент знаходимо з рівнянь рівноваги в нормальному перерізі бетонного елемента за [2]; при дії чистого зсуву як окремого випадку плоского напруженого стану складаємо рівняння лише для крутильного моменту:

$$M_{xy} = \sum_i A_{ci} (\tau_{yz_{ci}} x_{ci} - \tau_{xz_{ci}} y_{ci}), \quad (14)$$

де  $\tau_{yz_{ci}}, \tau_{xz_{ci}}$  — дотичні напруження в і-му елементі бетонного перерізу;  $x_{ci}, y_{ci}$  — координати центра ваги і-го елемента бетонного перерізу відносно центра симетрії перерізу балки;  $A_{ci}$  — площа і-го елемента перерізу балки.



Жорсткість при крученні обчислюємо в площині XOY [2]:

$$D = \sum_i \frac{A_{ci} E_c g_c}{\beta} (f_{yz_{ci}} X_{ci} - f_{xz_{ci}} Y_{ci}), \quad (15)$$

де

$$f_{xz_{ci}} = \frac{\tau_{xz_{ci}}}{\theta G} \quad f_{yz_{ci}} = -\frac{\tau_{yz_{ci}}}{\theta G}$$

— функції переміщень Сен-Венана; і

$$\gamma_{xz_{ci}} = \theta f_{xz_{ci}} \quad \gamma_{yz_{ci}} = \theta f_{yz_{ci}}$$

— прирости узагальнених кутових деформацій;  $\theta$  — кут закручування балки;  $\beta$  — коефіцієнт деплазації для круглого перерізу приймаємо  $\beta=1$ .

Координати центра кручення складають:

$$X_{c,tor} = \frac{\sum_i A_{ci} y_{ci} G_{ci}}{\sum_i A_{ci} G_{ci}} = y_{ci} Y_{c,tor} = \frac{\sum_i A_{ci} x_{ci} G_{ci}}{\sum_i A_{ci} G_{ci}} = x_{ci} \quad (16)$$

Тоді координати відносно центра кручення приймаємо:

$$X_{ci} = x_{ci} - X_{c,tor} = x_{ci} - y_{ci} \quad Y_{ci} = y_{ci} - Y_{c,tor} = y_{ci} - x_{ci} \quad (17)$$

$$X_{ci} = x_{ci} - X_{c,tor} \quad Y_{ci} = y_{ci} - Y_{c,tor}$$

— координати відносно центра кручення;

$X_{c,tor}, Y_{c,tor}$ , — координати центру кручення.

Для уточнення подальших розрахунків встановлено НС секторів в залежності від кута  $\alpha$ . Було прийнято  $\alpha=1^\circ; \alpha=2^\circ; \alpha=15^\circ$ , знайдено внутрішні зусилля і жорсткість та занотовано похибку у відсотках: вона досягає 14% при вивченні  $\alpha=2^\circ$  і  $\alpha=15^\circ$  і не перевищує 0,2% при розгляданні  $\alpha=1^\circ$  з  $\alpha=2^\circ$ . Отже, раціонально і достатньо для якості і надійності розрахунків приймати кут  $\alpha=2^\circ$ .

Наприкінці розрахунку слід побудувати епюри крутильних моментів і жорсткості — лише за довжи-

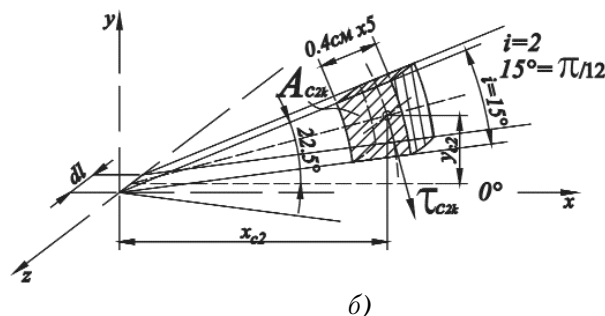


Рис. 3. Напружений стан кільцевого сектора, розглядаючи: а) переріз; б) стрижень за довжиною (у просторі)

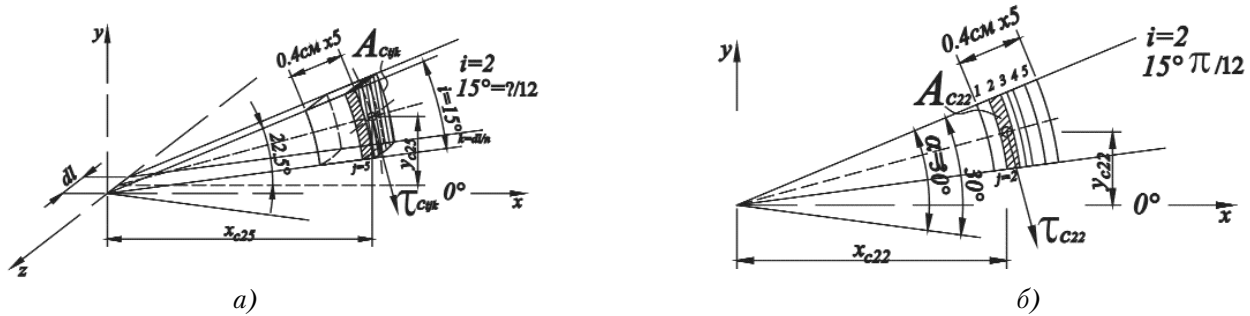


Рис. 4. Напружений стан кільцевого сектора, враховуючи зміну зусиль за товщиною кільця і розглядаючи: а) переріз; б) стрижень за довжиною (у просторі)

Таблиця 1. Значення крутильних моментів і жорсткостей за товщиною кільцевого перерізу

$R_i$ , см	$R_{01}$ , см	$M_{xy,bi}$ , кНсм	$D_{44}$ , кНсм <sup>2</sup>
10.0	9.801	0.148769	-4.26E+04
9.6	9.401	0.136874	-3.92E+04
9.2	9.001	0.125475	-3.59E+04
8.8	8.601	0.114571	-3.28E+04
8.4	8.201	0.109244	-2.98E+04

ною або і за товщиною перерізу кільця, в залежності від розрахунку. Також можна прослідкувати зміну відносних кутових деформацій, розглядаючи відповідну епюру за довжиною елемента. Для прикладу наведемо епюри крутильних моментів і крутильної жорсткості у перерізі за товщиною (рис. 5, табл. 1).

У таблиці  $M_{xy,bi}$  – шуканий момент;  $D_{44}$  – крутильна жорсткість;  $R_i$  – більший радіус шару, що розглядається;  $R_{01}$  – центр ваги шарів кільця відносно центра кола.

Розрахунок за методикою [2] скоригований для дослідження круглого або кільцевого перерізу, проведений для бетонного елемента класу С16/20 кільцевого перерізу з геометричними розмірами  $R=10$ см,  $r=8$ см;  $\tau_c=0.222$ кН/см<sup>2</sup>. Крутильна жорсткість  $D$  розрахована при граничному значенні січного модуля зсуву для дрібнозернистого бетону класу С16/20  $E_{c0} \vartheta_c = 1329.79$  кН/см<sup>2</sup>.

**Висновки і перспективи досліджень.** У роботі наведено методику розрахунку НДС залізобетонних елементів кільцевого і круглого перерізів при чистому крученні. За необхідності, інші невідомі для дослідження внутрішніх зусиль у складному напруженому стані можна ввести у розрахунок, визначаючи їх як наведено у [2] або за аналогією за відомими формулами опору матеріалів. Цінність даної роботи полягає у встановленні точних характеристик і врахуванні геометрії досліджуваних перерізів.

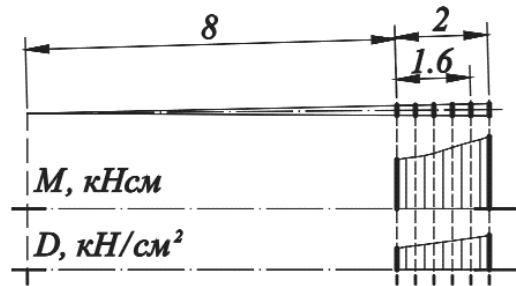


Рис. 5. Епюри крутильних моментів і жорсткостей в елементі кільцевого перерізу за товщиною при куті досліджуваного сектора  $\alpha=1^\circ$

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Азизов Т.Н. Теория пространственной работы перекрытий. – Киев: Науковий світ, 2001. – 276 с.
2. Яременко О.Ф., Школа Ю.О. Несуча здатність та деформативність залізобетонних стержневих елементів в складному напруженому стані. – Одеса: ОДАБА, 2010. – 136с.
3. Яременко О.Ф., Вільданова Н.Р. Застосування теорії складених стрижнів до розрахунку сталезалізобетонних балок// Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сб. науч. трудов. – Одеса: ОДАБА, 2011. – Ч. 2. – С.238-243.

#### АННОТАЦИЯ

В статье разработана интерпретация методики расчета НДС железобетонных элементов при чистом кручении в применении к кольцевому и круглому сечениям.

Ключевые слова: крутильная жесткость, диаграмма смещения бетона.

#### ANNOTATION

The version of the theoretical method for the deflection mode calculation of the reinforced concrete elements within pure torsion in application to the ring and round sections has been worked out.

Keywords: torsional rigidity, chart of shift of concrete.